Лабораторная работа №4
Применение теоремы Куна-Таккера

Рассмотрим задачу

$$f(x) \to \min, x \in X,$$
$$X = \{x : g_i(x) \le 0, i = \overline{1,k}; g_i = 0, i = \overline{k+1,m}, x \in X \subset R^n \quad (1)$$

Здесь $f(x), g_i(x), i = \overline{1,k}$ - выпуклые функции, $g_i(x), i = \overline{k+1,m}$ - линейные функции, Q - выпуклое множество.

Функция Лагранжа для задачи (1) имеет вид

$$F(x,\lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x), x \in R^n, \lambda \in R^m \quad (2)$$

Теорема Куна-Таккера:

для существования оптимального плана в задаче (1) с регулярным множеством планов:

$$\forall x^* \in X, x^* \in riQ,$$
$$g_i(x^*) < 0, i = \overline{1,k} \quad (3)$$

(riQ - относительная внутренность множества Q)

Необходимо и достаточно существование такого вектора

$\lambda^0 \in R, \lambda_i \ge 0, i = \overline{1,k}; \lambda_i^0, i = \overline{k+1,m}$ - произвольные, что пара { x^0, λ^0 } – седловая точка функции Лагранжа (2):

$$F(x^0,\lambda) \le F(x^0,\lambda^0) \le F(x,\lambda^0)$$
$$\forall x \in Q, \forall \lambda \in R^m, \lambda_i \ge 0, i = \overline{1,k} \quad (4)$$

и выполняется условие дополняющей нежесткости : $\lambda_i^0 g_i(x^0) = 0, i = \overline{1,k}$.

<u>Замечание</u>. Для линейных $g_i(x), i = \overline{1,k}$, теорема Куна-Таккера верна без условия Слейтера (3).

Схема решения:

1. Проверим, является ли данная задача задачей выпуклого программирования, используя свойство на выпуклых функций, выпуклых множеств, критерии выпуклости функций.

2. Записываем задачу в виду (1). При этом множество Q строим по ограничениям исходной задачи так, чтобы легко модно было проверить принадлежность ему вектора $x \in R^n$.

   Обычно, $Q = \{x : x_j \ge 0, \forall j \in I^* \subset I = \{i = \overline{1,n}\}\}, I^*$ подмножеством I .

3. Проверяем, является ли множество планов регулярным.
4. Ищем стационарные точки функции Лагранжа. Для этого решаем систему:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F(x,\lambda)}{\partial x_i} = 0, i = \overline{1,n} \\ \lambda_i g_i(x) = 0, i = \overline{1,k}, x \in X \\ g_i(x) = 0, i = \overline{k+1,m}, \lambda_i \ge 0, i = \overline{1,k} \end{cases} \quad (5)$$

5. Для каждой стационарной точки проверяем условие (4).

6. Если среди стационарных точек найдется седловая точка функции Лагранжа { $x^* \lambda^*$ }, то для x^* - решение исходной задачи $x^0 = x^*$. Если нет, (т.е. $x^0 \in \operatorname{int} Q$), то переходим к п.7.

7. Ищем решение задачи на границе множества Q. Если Q состоит из внутренних точек, то задача решения не имеет. Пусть L граница множества $Q, L \in Q$ и множества $L_i, i = \overline{1,s}$ – элементы L (например: грани, ребра, угловые точки). Для поиска решения задачи имеем совокупность задач

$$f(x) \to \min, x \in X_i, i = \overline{1,s} \tag{6}$$

где $X_i = \{x : x \in L_i, g_i(x) \le 0, i = \overline{1,k}, g_i(x) = 0, i = \overline{k+1,m}\}$

8. Если $X_i, 1 \le i \le s$ - выпуклое множество, то задачу (6) можно решать по схеме п.1 – п.6. Каждую стационарную точку задачи (6) проверяем на седловую для исходной задачи. Если мы не обнаружим решения исходной задачи при исследовании всех задач (6), то у нее решения нет.

Замечания.

1. Если $f(x)$ – строго выпуклая функция, то у задачи (1) может быть лишь один оптимальный план.

2. Если у задачи (1) найдено несколько различных оптимальных планов $x^{i0}, i = \overline{1,l}$, то решением является также любая их выпуклая линейная комбинация:

$$X = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i x^{i0}, \lambda_i \ge 0, \sum_{i=1}^{l} \lambda_i = 1$$

Пример.

Найти решение следующей задачи:

$$\begin{aligned} & f(x) = 3x_1^2 + x_1^2 + x_1x_2 - 7x_3 \to \min, \\ & 4x_1 + x_2 - 2x_3 = 5, \\ & 2x_2 + x_3 \le 4, \\ & x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x \in R^3 \end{aligned} \tag{7}$$

Решение.

1. Составляем матрицу вторых производных целевой функции $f(x)$

$$(f(x) \in C^{(2)})$$

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ge 0$$

Так как все главные миноры матрицы неотрицательные, то $f(x)$ - выпуклая функция. Ограничения задачи линейны. Следовательно, исходная задача является задачей выпуклого программирования.

2. Задачу (7) записываем в виде (1). Введем множество $Q = \{x : x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x \in R^3\}$. Имеем

$$
\begin{aligned}
& f(x) = 3x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 - 7x_3 \to \min, \\
& 4x_1 + x_2 - 2x_3 = 5, \\
& 2x_2 + x_3 \le 4 \\
& a \in Q
\end{aligned}
$$

3. Так как ограничения задачи линейны, то условие Слейтера (3) проверять не нужно.
4. Составляем функцию Лагранжа

$$F(x,\lambda) = 3x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 - 7x_3 + \lambda_1(4x_1 + x_2 - 2x_3 - 5) + \lambda_2(2x_2 + x_3 - 4), x \in Q, \lambda \in R^2, \lambda_2 \ge 0.$$

5. Составляем и решаем систему уравнений:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial F}{\partial x_1} = 6x_1 + x_2 + 4\lambda_1 = 0, \\
\dfrac{\partial F}{\partial x_2} = 2x_2 + x_1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0, \\
\dfrac{\partial F}{\partial x_3} = 7 - 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0, \\
4x_1 + x_2 - 2x_3 - 5 = 0, \\
\lambda_2(2x_2 + x_3 - 4) = 0
\end{cases}
$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \lambda_2 \ge 0$

1) Если $\lambda_2 = 0$, то из 3-го уравнения $\lambda_1 = -\dfrac{7}{2}$. Из 1, 2, 4 уравнения находим

$$x_1 = \frac{49}{22}, x_2 = \frac{7}{11}, x_3 = \frac{25}{11}$$

Стационарная точка $\{x^1, \lambda^1\} = \{\dfrac{42}{22}, \dfrac{25}{11}, -\dfrac{7}{2}, 0\}$

2) Если $2x_2 + x_3 - 4 = 0$, то имеем систему уравнений:

$$
\begin{cases}
6x_1 + x_2 + 4\lambda_1 = 0, \\
x_1 + 2x_2 + \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0, \\
2\lambda_1 + \lambda_2 = 7, \\
4x_1 + x_2 - 2x_3 = 4, \\
2x_2 + x_3 = 4
\end{cases}
$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \lambda_2 \ge 0$

Она решения не имеет.

6. Для пары $\{x^1, \lambda^1\}$ проверяем условие (4). Имеем

$$\frac{35}{44} \le \frac{35}{44} \le 3x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 - 14x_1\frac{7}{2}x_2 + \frac{35}{2}$$
$$\forall x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \forall \lambda_2 \ge 0 \tag{8}$$

7. В крайнем справа выражения в (8) стоит выпуклая функция, достигающая минимальное значение $\frac{35}{44}$ в своей стационарной точке: $x_1 = \frac{49}{22}, x_2 = \frac{7}{11}$.

Следовательно, (8) верно неравенство и $\{x^1, \lambda^1\}$ седловая торчка функции Лагранжа (2), т.е. $x^0 = x^1$ – оптимальный план задачи (7) и . $f(x^0) = \frac{35}{44}$.

Пример 2.

Найти решение задачи

$$\begin{aligned} & f(x) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 - 2x_2 \to \min \\ & x_1 + x_2 \le 2, \\ & x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{aligned} \tag{9}$$

1. Задача (9) – задача выпуклого программирования, так как $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} > 0$ и её ограничения линейны.
2. Положим $Q = \{x : x_1 \ge 0, x_2 \ge 0\}$
3. Составляем функцию Лагранжа, задачей (9):

$$\begin{aligned} & F(x,\lambda) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 - 2x_2 + \lambda(x_1 + x_2 - 2), \\ & x \in Q, \lambda \ge 0 \end{aligned}$$

4. Составляем и решаем систему (5):

$$\begin{cases} 2x_1 + \lambda = -2, \\ 2x_2 + \lambda = 2, \\ \lambda(x_1 + x_2 - 2) = 0, x \in Q, \lambda \ge 0 \end{cases}$$

   1) Если $\lambda = 0$, то из 1 и 2 уравнения получаем точку $x_1 = -1, x_2 = 1$, которая не принадлежит Q.

   2) Если $\lambda \ne 0$, то из системы

$$\begin{cases} 2x_1 + \lambda = -2, \\ 2x_2 + \lambda = 2, \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

   находим пару: $\lambda = -2, x_1 = 0, x_2 = 2$, которая также не является стационарной, так как не выполняется условие $\lambda \ge 0$. Итак, у функции Лагранжа нет стационарных точек.

5. Ищем решение на границе множества Q. Её элементы $L_1 = \{x : x_2 \ge 0, x_1 = 0\}, L_2 = \{x : x_1 \ge 0, x_2 = 0\}, L_3 = \{x_1 = x_2 = 0\}$.Решаем задачу на L_2. Имеем

$$\begin{aligned} & x_2^2 - 2x_2 \to \min, \\ & x_2 \le 2, \\ & x_2 \ge 0 \end{aligned} \qquad (10)$$

Функция Лагранжа задачи (10) имеет вид

$$F(x,\lambda) = x_2^2 - 2x_2 + \lambda(x_2 - 2), x_1 \ge 0, \lambda \ge 0$$

Решаем систему (5). Для неё

$$\begin{aligned} & 2x_2 + \lambda = 2, \\ & \lambda(x_2 - 2) = 0 \end{aligned}$$

Стационарная точка: $\lambda = 0, x2 = 1$

Проверяем для пары $\{x_1 = 0, x_2 = 1; \lambda = 0\}$ условие (4) для исходной задачи. Имеем

$$\begin{aligned} & -1 - \lambda \le x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 - 2x_2 = (x_1 + 1)^2 + (x_2 - 1)^2 - 2, \\ & \forall \lambda \ge 0, \forall x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{aligned} \qquad (11)$$

Левое неравенство в (11) выполняется для $\forall \lambda \ge 0$. Так как $(x_1 + 1)^2 \ge 1$ при $x_1 \ge 0$ и $(x_2 - 1)^2 \ge 0$, то правое неравенство выполняется для $\forall x \in Q$. Итак, $\{0,1;0\}$ - седловая точка функции Лагранжа задачи (9) и $x^0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, f(x^0) = -1$.

Задание. Исследовать следующие задачи:

1. $$\begin{aligned} & f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_2 - 6 \to \min \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 \le 3 \\ & x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ & x_j \ge 0, j = \overline{1,3} \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} & f(x) = -x_1^2 - x_2^2 - x_1 + 5x_2 - 5 \to \min \\ & 2x_1 + x_2 \le 8 \\ & x_1 + x_2 \le 5 \\ & x_1 \ge 0 \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} & f(x) = -x_1^2 - x_2^2 - x_1 + x_3 \to \max \\ & 3x_1 + x_2 + x_3 \le 4 \\ & x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ & x_j \ge 0, j = \overline{1,3} \end{aligned}$$

4.
$$
\begin{aligned}
& f(x) = 3x_1^2 + x_3^2 - 6x_2 + x_1 - 1 \to \min \\
& 2x_1 + x_2 - 4x_3 \le 1 \\
& 2x_1 + x_3 = 2 \\
& x_1 \ge 0, x_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

5.
$$
\begin{aligned}
& f(x) = 3x_1^2 11x_1 - 3x_2 - x_3 - 27 \to \min \\
& x_1 - 7x_2 + 3x_3 \le -7 \\
& 5x_1 + 2x_2 - x_3 \le 2 \\
& x_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

6.
$$
\begin{aligned}
& f(x) = x_1x_3 + x_2x_3 + x_1 - 6x_2 \to \min \\
& 4x_1 + x_2 \le 1 \\
& 2x_1 + x_3 = 2 \\
& x_j \ge 0, j = \overline{1,3}
\end{aligned}
$$

7.
$$
\begin{aligned}
& f(x) = x_1^2 + x_1x_2 - x_3 + 4 \to \min \\
& x_1 - x_2 + x_3 \le 1 \\
& 2x_2 + x_3 \ge 4 \\
& x_1 \ge 0, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

8.
$$
\begin{aligned}
& f(x) = x_1^2 + x_1x_3 - 2x_2 + 4 \to \min \\
& 5x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\
& 2x_1 + x_2 \le 3 \\
& x_1 \ge 0, x_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

9.
$$
\begin{aligned}
& f(x) = x_2^2 + x_3^2 - x_2 + 5 \to \min \\
& x_1 + x_2 - 2x_3 \le 1 \\
& 2x_1 + x_3 = 2 \\
& x_1 \ge 0, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

10.
$$
\begin{aligned}
& f(x) = x_1^2 + x_3^2 - 2x_2 \to \min \\
& x_1 + x_3 = 1 \\
& 2x_1 + x_2 - x_3 \le 2 \\
& x_1 \ge 0
\end{aligned}
$$

11.
$$
\begin{aligned}
& f(x) = x_1^2 + x_1x_2 - 4x_3 \to \min \\
& x_1 + x_2 \le 1 \\
& x_2 + x_3 = 2 \\
& x_1 \ge 0, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

12. $$\begin{aligned} & f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + 6 \to \min \\ & 2x_1 - x_2 + x_3 \le 1 \\ & 4x_1 + 8x_2 - x_3 \le 4 \\ & x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

13. $$\begin{aligned} & f(x) = -x_1^2 - x_3^2 - 6 \to ma \\ & x_1 + 2x_2 - x_3 \le 5 \\ & x_2 + 2x_3 = 2 \\ & x_1 \ge 0 \end{aligned}$$

14. $$\begin{aligned} & f(x) = x_1^2 + x_2x_3 - x_1 - 1 \to \min \\ & x_1 + x_2 - 2x_3 \le 1 \\ & 2x_2 + x_3 = 2 \\ & x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

15. $$\begin{aligned} & f(x) = x_2^2 + x_1 + x_3 - x_2 + 1 \to \min \\ & 2x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ & x_1 + 3x_2 \ge 1 \\ & x_1 \ge 0 \end{aligned}$$

16. $$\begin{aligned} & f(x) = -x_1^2 + x_2x_3 - x_2^2 \to \max \\ & x_1 + x_2 - 2x_3 \le 4 \\ & x_1 + x_3 \le 1 \\ & x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

17. $$\begin{aligned} & f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 \to \min \\ & x_1 + x_2 = 1 \\ & x_2 + x_3 \le 2 \end{aligned}$$

18. $$\begin{aligned} & f(x) = x_1^2 + x_3^2 + x_1 + x_2^2 - 1 \to \min \\ & x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ & x_1 + 2x_2 \ge -2 \\ & x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

19. $$\begin{aligned} & f(x) = -x_1^2 - x_2x_3 \to \max \\ & x_1 + x_2 + x_3 \le 1 \\ & -2x_1 + x_3 = 2 \\ & x_1 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

20. $$\begin{aligned} & f(x) = -x_1x_3 + 4x_1 + x_2 \rightarrow \max \\ & 3x_1 + x_2 + -x_3 \le 1 \\ & x_1 + x_2 + 2x_3 \le 2 \\ & x_1 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

21. $$\begin{aligned} & f(x) = x_1^2 + x_3^2 + x_2^2 \rightarrow \min \\ & 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 1 \\ & x_1 + 3x_2 - x_3 \le 3 \\ & x_1 \ge 0 \end{aligned}$$

22. $$\begin{aligned} & f(x) = -x_1^2 - x_3^2 - 2x_1 + x_2 \rightarrow \max \\ & 6x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ & 2x_1 - x_3 \le 2 \\ & x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

23. $$\begin{aligned} & f(x) = x_1 + x_3^2 + x_2x_3 - 4 \rightarrow \min \\ & 4x_1 + x_2 - x_3 \le 3 \\ & x_1 + 2x_2 \le 3 \\ & x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

24. $$\begin{aligned} & f(x) = x_1^2 + x_3^2 + 2x_2 + x_1 + 4 \rightarrow \min \\ & x_1 - 2x_2 = 1 \\ & x_2 + x_3 \ge 1 \\ & x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

25. $$\begin{aligned} & f(x) = x_1^2 + x_3^2 + 6x_1 + x_2 - x_3 \rightarrow \min \\ & 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1 \\ & 2x_2 + x_3 \ge -2 \\ & x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

26. $$\begin{aligned} & f(x) = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 \rightarrow \min \\ & x_1 - 3x_3 \le 2 \\ & 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ & x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$